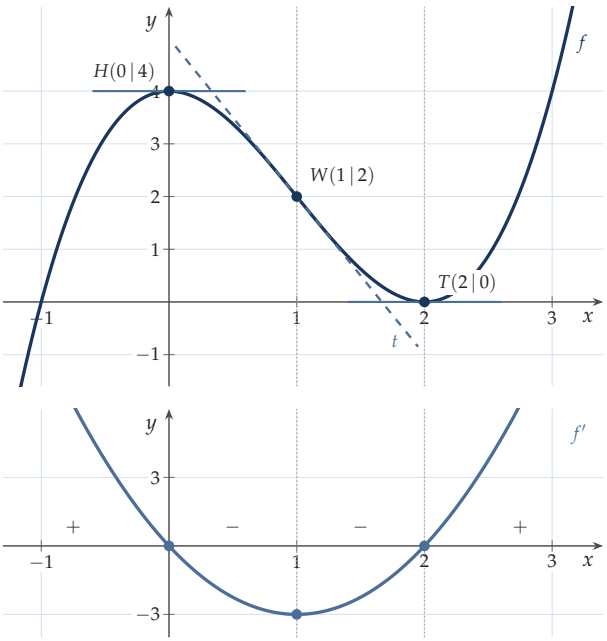
Ableitungen & Kurvendiskussion

Trainingsheft · Gymnasium, Oberstufe und Maturavorbereitung · Beispielmaterial

1 Verstehen: Was verrät die Ableitung über eine Funktion?

$f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0. f'' beschreibt, wie sich diese Steigung ändert, also die *Krümmung* des Graphen.



Oben der Graph von $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ mit Wendetangente t, **unten** der Graph von f'.

Steigung. $f' > 0$: f steigt. $f' < 0$: f fällt. Die Vorzeichen von f' stehen unten.

Waagrechte Tangente. Bei $x = 0$ und $x = 2$ ist $f' = 0$. Dort wechselt f' das Vorzeichen: Extrempunkte.

Krümmung. $f'' > 0$: Linkskurve. $f'' < 0$: Rechtskurve.

Wendepunkt. Die Krümmung wechselt. Die Steigung ist dort extremal: f' hat bei $x = 1$ ein Minimum.

Die Kriterien

Stelle x_0	notwendig	hinreichend	oder kürzer
Extremstelle	$f'(x_0) = 0$	f' wechselt bei x_0 das Vorzeichen: von $+$ nach $-$: Hochpunkt von $-$ nach $+$: Tiefpunkt	$f''(x_0) < 0$: Hochpunkt $f''(x_0) > 0$: Tiefpunkt
Wendestelle	$f''(x_0) = 0$	f'' wechselt bei x_0 das Vorzeichen	$f'''(x_0) \neq 0$

Liefert die kürzere Prüfung den Wert 0, entscheidet der Vorzeichenwechsel.

Vollständig durchgerechnet: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

1 Ableitungen

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, \quad f''(x) = 6x - 6, \quad f'''(x) = 6$$

2 Extremstellen $f'(x) = 0$

$$3x(x-2) = 0 \implies x_1 = 0,\ x_2 = 2$$

$$f''(0) = -6 < 0 \ \Rightarrow\ H(0\,|\,4)$$
$$f''(2) = \ \ 6 > 0 \ \Rightarrow\ T(2\,|\,0)$$

3 Wendestelle $f''(x) = 0$

$$6x - 6 = 0 \implies x_W = 1, \qquad f'''(1) = 6 \neq 0$$

Mit $f(1) = 2$ folgt $W(1\,|\,2)$.

4 Wendetangente $m = f'(1) = -3$

$$t(x) = -3(x-1) + 2 = -3x + 5$$

Wegen $f(x) - t(x) = (x-1)^3$ liegt der Graph links von W *unterhalb*, rechts von W *oberhalb* der Tangente.

2 Selbst üben

Hinweise: Seite 3 · Lösungen: Seiten 4 und 5

Aufgabe 1

●○○ Grundlagen

Gegeben ist $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$.

a) Bestimme $f'(x)$ und $f''(x)$.

b) Berechne die Extrempunkte und bestimme ihre Art.

c) Bestimme den Wendepunkt W und die Gleichung der Wendetangente.

d) Zeige, dass $x = 2$ eine Nullstelle ist, und bestimme die übrigen Nullstellen exakt.

Aufgabe 2

●●○ Vertiefung

Gegeben ist $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$.

a) Bestimme die Nullstellen. Was fällt dir an ihnen auf?

b) Berechne alle Extrempunkte und bestimme ihre Art.

c) Bestimme die Wendepunkte exakt.

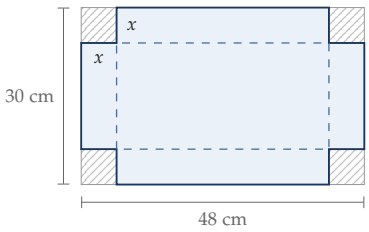
d) Zeige mit $f(2 - x) = f(x)$, dass der Graph symmetrisch zur Geraden $x = 1$ ist.

e) Für welche c hat die Gleichung $f(x) = c$ genau vier Lösungen? Begründe.

Aufgabe 3

●●● Anwendung

Aus einem Karton von 48 cm Länge und 30 cm Breite entsteht eine oben offene Schachtel: An den Ecken werden Quadrate mit der Seitenlänge x (in cm) ausgeschnitten, die Ränder werden hochgeklappt.



a) Stelle $V(x)$ auf und gib den Definitionsbereich an.

b) Für welches x ist das Volumen maximal? Weise das Maximum nach und berechne $V_{\max}$.

c) Die Schachtel darf höchstens 5 cm hoch sein. Welches Volumen ist nun maximal möglich?

3 Hilfestellungen

Lies jeweils nur einen Hinweis und rechne dann selbst weiter. Ergebnisse stehen hier noch keine.

Aufgabe 1 $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$

Hinweis 1	Extrem-, Wende- und Nullstellen: Welche Gleichung liefert jeweils die Kandidaten, $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$ oder $f(x) = 0$?
Hinweis 2	Klammere in $f'(x) = 0$ den Faktor -3 aus. Für d) dividierst du $f(x)$ durch $(x - 2)$.
Hinweis 3	$x^2 - 4x + 3 = 0$: zwei Zahlen mit Produkt 3 und Summe 4. Steigung der Wendetangente: $f'(x_W)$. Restfaktor der Division: $-x^2 + 4x - 1$.

Aufgabe 2 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

Hinweis 1	Klammere x^2 aus. Erkennst du im Rest eine binomische Formel?
Hinweis 2	$f(x) = x^2(x-2)^2$ und $f'(x) = 4x\,(x^2 - 3x + 2)$. Für d) setzt du $2 - x$ in die faktorisierte Form ein.
Hinweis 3	$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 - 6x + 2 = 0$; lass die Wurzeln stehen. Zum Einsetzen hilft $f(x) = \big((x-1)^2 - 1\big)^2$. Für e) zählst du die Schnittpunkte mit waagrechten Geraden $y = c$.

Aufgabe 3 Schachtel aus einem Karton

Hinweis 1	Wie lang, wie breit und wie hoch ist die Schachtel, wenn an jeder Ecke ein Quadrat der Seitenlänge x fehlt?
Hinweis 2	$V(x) = x\,(48 - 2x)(30 - 2x)$. Alle drei Kantenlängen müssen positiv sein.
Hinweis 3	$V'(x) = 12\,(x^2 - 26x + 120)$. Für c) prüfst du das Vorzeichen von $V'(x)$ für $0 < x \leq 5$.

Typische Denkfehler

1. $f'(x_0) = 0$ allein genügt nicht: $f(x) = x^3$ hat bei $x = 0$ einen Sattelpunkt, keinen Extrempunkt.
2. $f''(x_0) = 0$ allein genügt nicht: $f(x) = x^4$ hat bei $x = 0$ einen Tiefpunkt, keinen Wendepunkt.
3. Der y-Wert eines Punktes ist $f(x_0)$, nicht $f'(x_0)$.
4. Die Wendetangente hat die Steigung $f'(x_W)$, nicht $f''(x_W)$.
5. Lösungen ausserhalb des Definitionsbereichs werden verworfen.
6. Ist der Bereich eingeschränkt, können Randwerte grösser sein als jedes lokale Maximum.

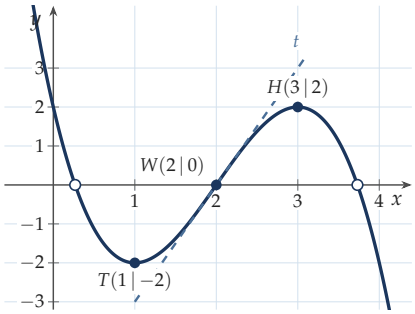
4 Lösungen

Aufgabe 1

●○○ Grundlagen

a)

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$$
$$f''(x) = -6x + 12, \qquad f'''(x) = -6$$



Leere Kreise: die Nullstellen $2 \pm \sqrt{3}$.

b) $f'(x) = 0$:

$$-3\,(x-1)(x-3) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 1,\ x_2 = 3$$

$$f''(1) = \;\; 6 > 0, \quad f(1) = -2 \;\Rightarrow\; T(1\,|\,-2)$$
$$f''(3) = -6 < 0, \quad f(3) = \;\; 2 \;\Rightarrow\; H(3\,|\,2)$$

c) $f''(x) = 0 \Rightarrow x_W = 2,\ f'''(2) \neq 0,\ f(2) = 0$: $W(2\,|\,0)$

$$m = f'(2) = 3, \qquad t(x) = 3(x-2) = 3x - 6$$

d) $f(2) = 0$. Polynomdivision und quadratische Gleichung:

$$(-x^3 + 6x^2 - 9x + 2) : (x-2) = -x^2 + 4x - 1, \qquad x^2 - 4x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 2 \pm \sqrt{3}$$

Nullstellen: $2 - \sqrt{3} \approx 0.27$, $\quad 2$, $\quad 2 + \sqrt{3} \approx 3.73$.

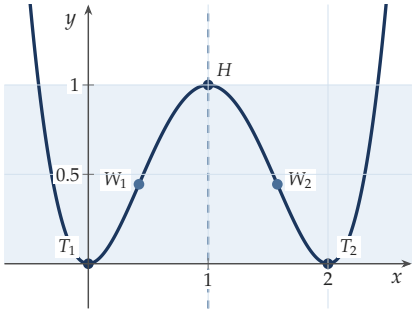
Aufgabe 2

●●○ Vertiefung

a) $f(x) = x^2(x^2 - 4x + 4) = x^2(x-2)^2$.
Doppelte Nullstellen bei $x = 0$ und $x = 2$: Der Graph berührt dort die x-Achse.

b)

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x-1)(x-2)$$
$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 8$$
$$f''(0) = 8 > 0, \quad f''(1) = -4 < 0, \quad f''(2) = 8 > 0$$
$$T_1(0\,|\,0), \qquad H(1\,|\,1), \qquad T_2(2\,|\,0)$$



Gestrichelt: Symmetrieachse $x = 1$.
Hellblau: $0 < y < 1$ (zu Teil e).

c) $f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 - 6x + 2 = 0$:

$$x_W = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad f'''(x_W) = 24(x_W - 1) \neq 0$$

Mit $f(x) = \left((x-1)^2 - 1\right)^2$ und $(x-1)^2 = \frac{1}{3}$:

$$f(x_W) = \left(\tfrac{1}{3} - 1\right)^2 = \tfrac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad W_{1,2}\left(1 \mp \tfrac{\sqrt{3}}{3} \;\middle|\; \tfrac{4}{9}\right)$$

4 Lösungen (Fortsetzung)

Aufgabe 2 d) Einsetzen in die faktorisierte Form:

$$f(2-x) = (2-x)^2\left((2-x)-2\right)^2 = (2-x)^2\,x^2 = f(x)$$

x und $2-x$ liegen spiegelbildlich zu $x=1$ und haben denselben Funktionswert.

Aufgabe 2 e) f fällt bis $T_1(0\,|\,0)$, steigt bis $H(1\,|\,1)$, fällt bis $T_2(2\,|\,0)$ und steigt dann unbeschränkt. Eine waagrechte Gerade $y=c$ schneidet den Graphen deshalb genau viermal, wenn

$$\boxed{0 < c < 1}$$

Häufiger Fehler. Wendestellen erst nach dem Einsetzen runden. Mit $x \approx 0.42$ erhält man $f(x_W)$ nur näherungsweise.

Aufgabe 3

●●● Anwendung

a) Boden $(48-2x)\times(30-2x)$, Höhe x:

$$V(x) = x\,(48-2x)(30-2x) = 4x^3 - 156x^2 + 1440x$$

Alle Kanten positiv: $0 < x < 15$.

b)

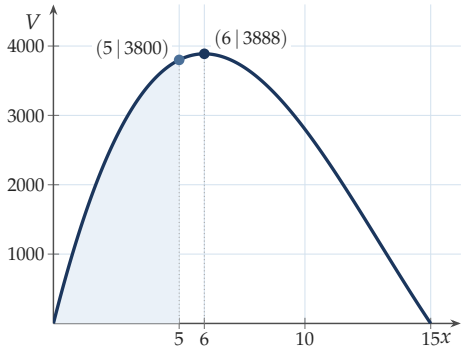
$$V'(x) = 12x^2 - 312x + 1440 = 12\,(x-6)(x-20)$$

$x=20$ liegt nicht im Definitionsbereich, es bleibt $x=6$.

$$V''(x) = 24x - 312, \qquad V''(6) = -168 < 0$$

Lokales Maximum. Da $V(x)\to 0$ für $x\to 0$ und $x\to 15$, ist es auch das grösste Volumen:

$$V(6) = 6\cdot 36\cdot 18 = 3888\ \text{cm}^3$$



Graph von V für $0 < x < 15$.
Hellblau: Bereich $0 < x \le 5$ aus c).

c) Für $0 < x \le 5$ sind $(x-6)$ und $(x-20)$ negativ, also $V'(x) > 0$: V wächst. Das Maximum liegt am Rand:

$$V(5) = 5\cdot 38\cdot 20 = 3800\ \text{cm}^3$$

Häufiger Fehler. Hier hilft $V'(x)=0$ nicht weiter: $x=6$ ist nicht mehr erlaubt, und am Rand ist $V'(5) = 180 \neq 0$.

Kontrolle auf einen Blick

Aufgabe 1	$T(1\,|\,-2)$, $H(3\,|\,2)$, $W(2\,|\,0)$, $t(x)=3x-6$, Nullstellen $2-\sqrt{3}$, 2, $2+\sqrt{3}$
Aufgabe 2	$T_1(0\,|\,0)$, $H(1\,|\,1)$, $T_2(2\,|\,0)$, $W_{1,2}\left(1\mp\frac{\sqrt{3}}{3}\,\middle|\,\frac{4}{9}\right)$, vier Lösungen für $0<c<1$
Aufgabe 3	$V(x)=4x^3-156x^2+1440x$, $0<x<15$, $V_{\max}=V(6)=3888\ \text{cm}^3$; mit $x\le 5$: $V(5)=3800\ \text{cm}^3$